

1 Pracovní úkoly

1. Sestavte obvod podle obr. 1 a změřte pro obvod v periodickém stavu závislost doby kmitu T na velikosti zařazené kapacity. ($C = 0,1; 0,3; 0,5; 1,0; 3,0; 5,0 \mu\text{F}$, $R = 20 \Omega$). Výsledky měření zpracujte graficky a vyhodnoťte velikost indukčnosti L zařazené v obvodu.
2. Stanovte hodnoty aperiodizačních odporů pro dané kapacity ($0,5; 1,0; 2,0; 5,0 \mu\text{F}$). I v tomto případě stanovte velikost indukčnosti L .
3. Změřte závislost relaxační doby obvodu RC na velikosti odporu nebo kapacity v obvodu. Výsledky měření zpracujte graficky a porovnejte s teoretickými.

2 Teoretický úvod

Hlavním úkolem této úlohy je zkoumání přechodových dějů v RLC obvodu při připojení či při odpojení tvrdého napěťového zdroje. V sériovém RLC obvodu (jako na obrázku 1) platí diferenciální rovnice dle II. Kirchhoffova zákona

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0, \quad (1)$$

kde L je indukčnost cívky, R odpor rezistoru (respektive správněji rezistance celého obvodu), C je kapacita kondenzátoru a I je proud procházející obvodem. Tato rovnice může mít tři různá řešení.

1. **Periodické řešení**, resp. tlumené kmity, získáme pro $R^2 \leq \frac{4L}{C}$. Pro proud v obvodu pak platí

$$I_1 = I_0 e^{-\alpha t} \sin(\beta t), \quad (2)$$

kde I_0 je proud v čase ihned po přepojení obvodu, t je čas, $\alpha = \frac{R}{2L}$ a $\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$. β má v našem uspořádání význam kruhové frekvence a pro periodu kmitů T obvodu pak platí

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \quad (3)$$

2. **Mezně aperiodické řešení** pro $R^2 = \frac{4L}{C}$, kdy proud v obvodu bude

$$I_2 = I_0 t e^{-\alpha t} \quad (4)$$

Jedná se vlastně o obvod, jehož konfigurace vede k tomu, že již proud nepřekmitne a nezmění směr, ale bude se nejrychleji blížit nulové hodnotě.

3. **Aperiodické řešení** je pro obvod, kde $R^2 \geq \frac{4L}{C}$. Pro průběh proudu pak platí

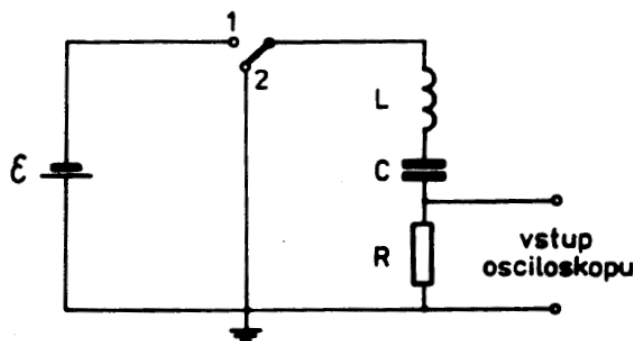
$$I_3 = I_0 e^{-\alpha t} \sinh \bar{\beta} t, \quad (5)$$

kde $\bar{\beta} = -\beta$.

Pokud cívku odpojíme a v obvodu ponecháme pouze kondenzátor a rezistor, pak můžeme naměřit exponenciální nabíjení/vybíjení kondenzátoru. Pro proud v obvodu platí

$$I = I_0 e^{t/\tau}, \quad (6)$$

kde τ je konstanta, která se nazývá relaxační doba a platí pro ni $\tau = RC$.



Obrázek 1: Schema zapojení měřeného obvodu

3 Měření

3.1 Chyba měření

Chybu měření počítám dle [2]. Celková chyba měření σ_f (pro veličinu f) je určena jako

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_{stat}^2 + \sigma_{mer}^2}, \quad (7)$$

kde σ_{stat} je statistická chyba měření f a σ_{mer} je chyba měřidla (určená obvykle jako polovina nejmenšího dílku stupnice) použitého pro měření f .

Metoda přenosu chyb je pak pro veličinu vypočtenou z n jiných naměřených veličin x_i

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2}. \quad (8)$$

3.2 Měření závislosti doby kmitu na velikosti kapacity

Pro měření všech úloh byl využit obvod připojený k počítačovému měřicímu systému ISES, v němž probíhala i část zpracování. V obvodu byla zapojená cívka s pevně danou indukčností (a odporem, protože se nejedná o ideální součástku), kapacitní dekáda, na které byly nastavovány průběžně hodnoty kapacity, a odporová dekáda, na které byla nastavena pro tuto část úlohy hodnota odporu 20Ω , ale v dalších měřeních byly hodnoty odporu měněny.

Všechna měření probíhala pro vybíjení obvodu, který byl předtím nabit pomocí tvrdého zdroje napětí. V tomto stavu jsme měli lepší informaci o obvodu (hlavně z hlediska odporů).

Při měření závislosti doby kmitu na velikosti zapojené kapacity jsem odečítal doby 10 period kmitů, aby byla omezena chyba měření.

Naměřená data jsou v tabulce č. 1. Data jsem zpracoval pomocí programu gnuplot, v němž jsem pomocí metody nemenších čtverců nafitoval přes parametry L a R nejvhodnější funkci odpovídající teorii. Grafické znázornění je na obr. č. 2. Parametr R jsem zvolil jako volný zejména, protože v obvodu byla cívka, která je reálná, vytvořená smotáním dlouhého drátu a má tedy znatelný odpor. Pomocí tohoto zpracování mi vyšlo

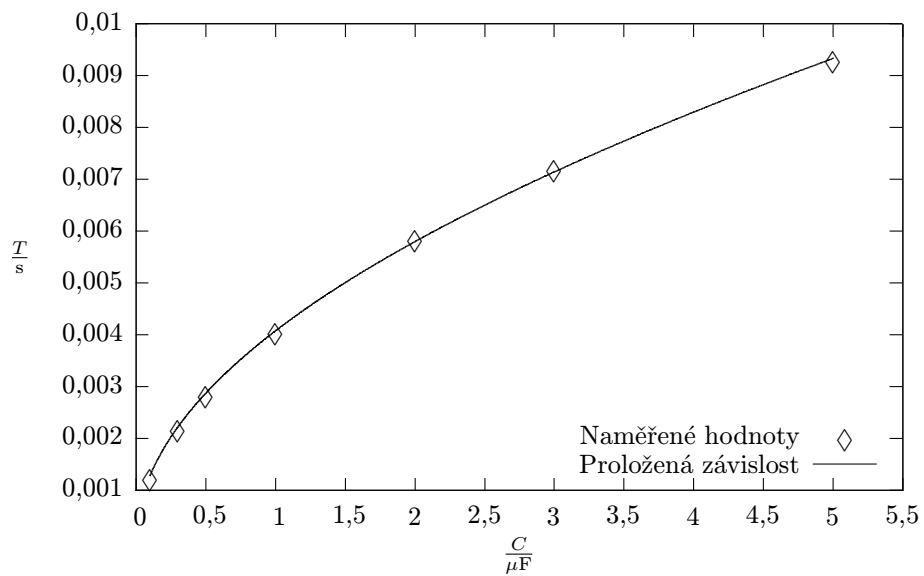
$$L = (0,42 \pm 0,01) \text{ H},$$

$$R = (140 \pm 20) \Omega.$$

Jako chybu беру statistickou chybu, protože čas je určený relativně velice přesně a stejně tak kapacitní dekáda měla relativně zanedbatelnou chybu.

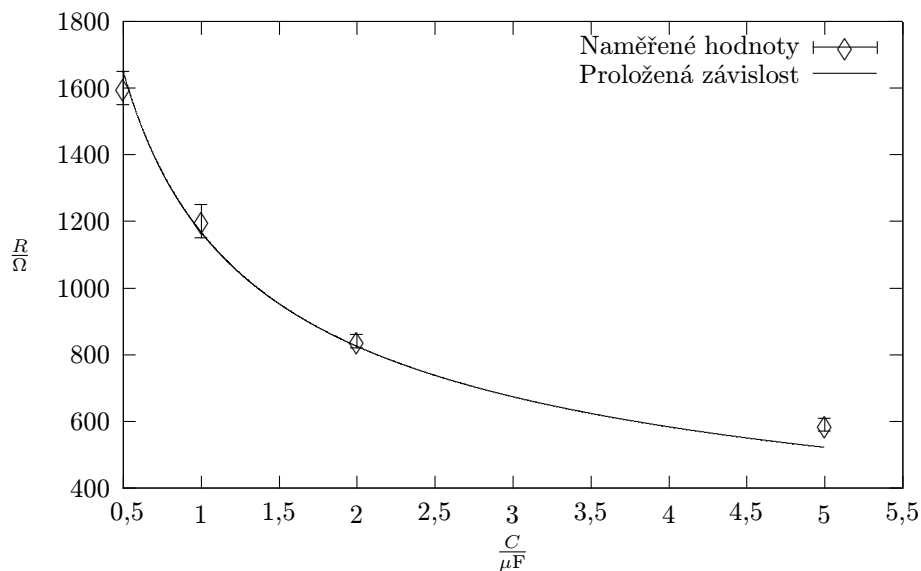
Tabulka 1: Měření závislosti doby kmitu T na velikosti kapacity C

$C/\mu\text{F}$	$10 T/\text{s}$
0,1	0,0124
0,3	0,0218
0,5	0,0284
1,0	0,0405
2,0	0,0584
3,0	0,0719
5,0	0,0930

Obrázek 2: Závislost doby kmitu obvodu T na zapojené kapacitě C

Tabulka 2: Měření aperiodizačních odporů

$C/\mu\text{F}$	R_{ap}/Ω
0,5	1600 ± 50
1,0	1200 ± 50
2,0	840 ± 20
5,0	590 ± 20

Obrázek 3: Závislost aperiodizačních odporů na kapacitě v obvodu C

3.3 Měření aperiodizačních odporů

Hodnoty aperiodizačních odporů v závislosti na zapojené kapacitě C v obvodu byly měřeny tak, že byl postupně zužován interval odporů mezi situací, kdy ještě v obvodu probíhaly oscilace (a v obvodu došlo k minimálně jednomu viditelnému překmitu) a situací, kdy se již jasně blížila hodnota napětí v obvodu nulové hodnotě pouze z jedné strany. Chybu jsem pak určil podle šířky intervalu, kterou jsem zhruba omezil zmíněným postupem.

Měření jsou zaznamenána v tabulce č. 2 a v grafu č. 3. Hodnoty jsem proložil teoretickou závislostí, ale fit nesedí příliš dobře na naměřená data, kterých je navíc relativně málo a mají relativně velkou chybu určení a proto neberu hodnotu indukčnosti cívky za směrodatnou (v tomto případě vyšla hodnota indukčnosti zhruba o 20% menší - přesně $L = (0,34 \pm 0,05) \text{ H}$).

3.4 Měření relaxačních dob RC obvodu

Pro toto měření byla vypojena cívka z obvodu, ale jinak byl použit stejný systém měření. Odečtení převrácené hodnoty relaxační doby probíhalo tak, že v naměřeném grafu jsem naklikal 10 až 15 bodů, které jsem pak nechal proložit odpovídající funkcí a odečetl jsem potřebný údaj. Chyby fitu z proložení v programu byly nejvýše zhruba 1% a určené hodnoty relaxačních dob budou tedy zejména srovnávat s teoretickými hodnotami $\tau = RC$.

Měření proběhla pro 4 hodnoty odporů a 4 hodnoty kapacit ve všech kombinacích. Naměřená

Tabulka 3: Měření relaxačních dob RC obvodu

$\frac{R}{\Omega}$	$\frac{C}{\mu\text{F}}$	$\frac{1}{\tau/\text{s}}$	$\frac{\tau}{\text{s}}$	δ	$\frac{R}{\Omega}$	$\frac{C}{\mu\text{F}}$	$\frac{1}{\tau/\text{s}}$	$\frac{\tau}{\text{s}}$	δ
1000	1	980	0,00102	2,0%	5000	1	194	0,00515	3,1%
1000	2	491	0,00204	1,8%	5000	2	99,3	0,0101	0,7%
1000	5	194	0,0052	3,1%	5000	5	38,7	0,0258	3,4%
1000	10	98,1	0,0102	1,9%	5000	10	19,9	0,0503	0,5%
2000	1	490	0,00204	2,0%	10000	1	94,9	0,0105	5,4%
2000	2	243	0,00412	2,9%	10000	2	49,5	0,0202	1,0%
2000	5	98,3	0,0102	1,7%	10000	5	19,6	0,0510	2,0%
2000	10	49,0	0,0204	2,0%	10000	10	9,89	0,101	1,1%

data jsou umístěna v tabulce č. 3. Ve sloupci označeném δ je hodnota

$$\delta = \frac{|\tau - \tau_{teor}|}{\tau_{teor}},$$

kteřá určuje odchylku naměřené hodnoty τ od hodnoty teoretické τ_{teor} určené vynásobením hodnot C a R . Tato odchylka se pohybuje maximálně do 6% a to pouze v jednom případě, pouze 4 hodnoty mají větší odchylku než 3% a průměrná odchylka je 2,2%. Naměřené hodnoty tedy relativně dobře odpovídají teoretickým hodnotám, zejména vzhledem k tomu, že jsme zanedbali odpory přírodních vodičů a další možné vlivy prvků systému.

Protože byly naměřeny právě hodnoty tabulky 4x4, tak jsem se pokusil vytvořit co nejpřehlednější trojrozměrný graf v Excelu. Pro teoretické hodnoty, kdy jsem mohl volit interval mezi sousedními body vyšel velice přehledný graf na obr. 4. Pro naměřené hodnoty (obr. č. 5) je zde ovšem úskalí v tom, že mezi sousedními datovými řadami zachovává konstantní vzdálenosti nezávisle na jejich hodnotovém rozdílu. Ale po uvážení tohoto faktu a toho, že měření bylo pouze 4x4 a Excel spojuje sousední hodnoty v plošných grafech, je vidět, že grafy si odpovídají.

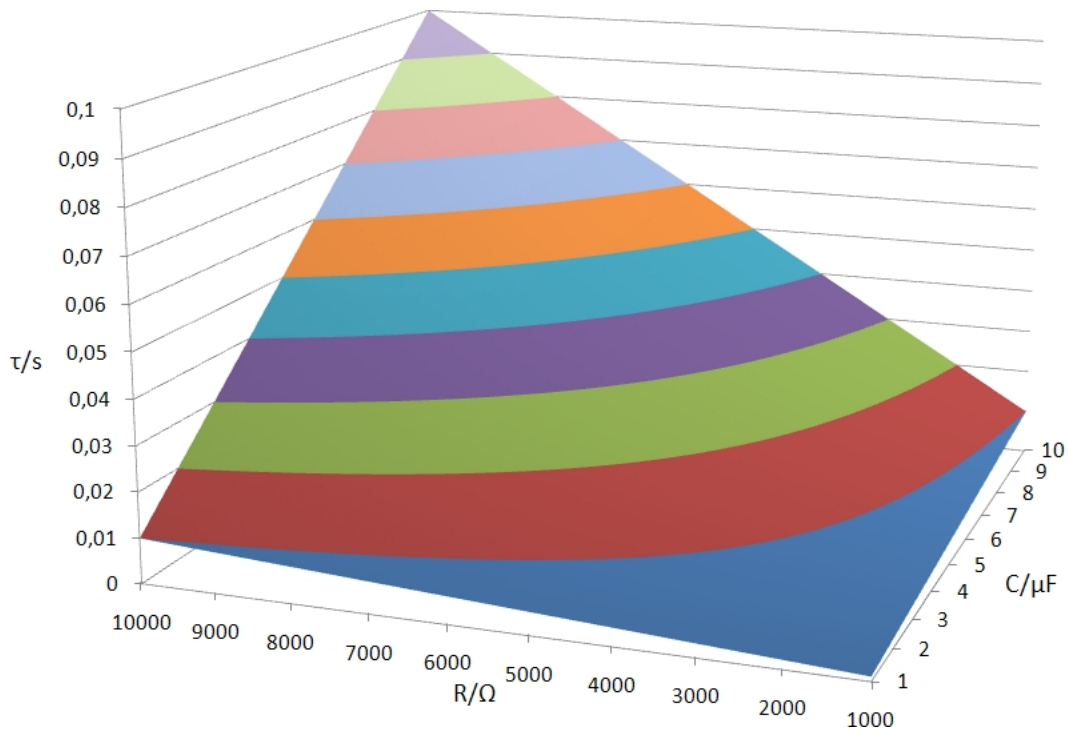
4 Diskuse

Při odečítání doby kmitu na počítači jsem se nemusel zcela přesně myší trefit do bodu, kde procházel graf naměřeného napětí nulovou hodnotou, ale relativně jsem byl vždy velice blízko a navíc jsem odečítal vždy dobu deseti period, čímž se tato chyba stala prakticky zanedbatelnou.

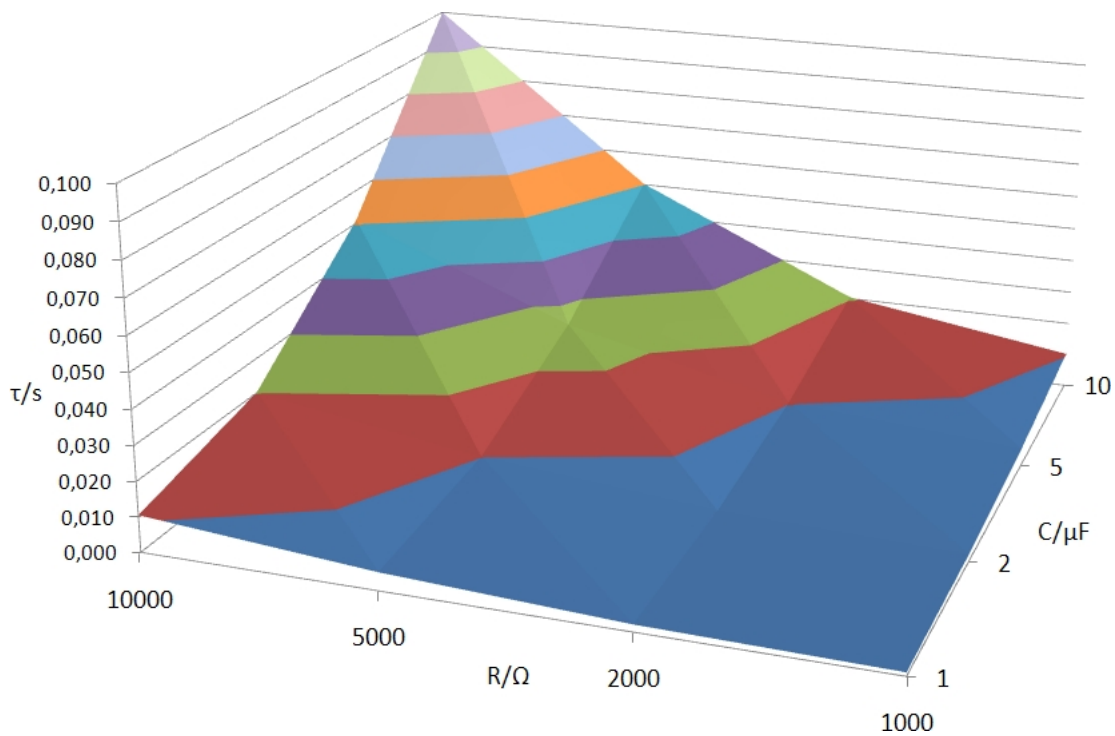
Při měření aperiodizačních odporů, byly výsledné hodnoty značně závislé na tom, jak moc dobře jsem schopen rozpoznat situaci, kdy ještě dojde k alespoň jednomu překmitnutí v obvodu a situaci, kdy již obvod nekmitá a jenom se blíží nulové hodnotě proudu tak, že proud klesá v čase. Myslím ale, že v rámci měření jsem stanoval odpovídající chybu tak, aby do určeného intervalu skutečná hodnota aperiodizačního odporu téměř jistě padla.

Rozdílné hodnoty L určené pomocí obou metod si vysvětluji tím, že, zejména v druhém měření, bylo velice málo naměřených hodnot na to mít pořádnou statistiku. Navíc druhé měření bylo zatíženo, již zmíněnou, mojí chybou odhadu.

Při měření RC jsem při určování teoretické hodnoty relaxační doby τ zanedbával vliv odporů přírodních vodičů a případných dalších součástek, které mohly ovlivnit vybíjení. Ale i tak naměřené hodnoty relaxačních dob velice dobře odpovídají teoreticky určeným na základě hodnot nastavených na dekádách. Největší odchylka nedosáhla ani 6% a valná většina hodnot měla odchylku od teoretické pod 3%.



Obrázek 4: Teoretické hodnoty relaxační doby obvodu RC



Obrázek 5: Naměřené hodnoty relaxačních dob RC

5 Závěr

Vytvořil jsem graf č. 2 se závislostí doby kmitu obvodu T na zapojené kapacitě C a určil jsem indukčnost cívky

$$L = (0,42 \pm 0,01) \text{ H.}$$

Stanovil jsem hodnoty aperiodizačních odporů pro zadané kapacity. Změřil jsem závislosti relaxační doby na hodnotách R a C zapojených v obvodu a graficky jsem to znázornil.

6 Literatura

- [1] *R. Bakule, J. Šternberk:*
Fyzikální praktikum II - Elektřina a magnetismus
UK Praha, 1989
- [2] *J. English:*
Úvod do praktické fyziky I
Matfyzpress, Praha 2006
- [3] *J. Brož a kol.:*
Základy fyzikálních měření
SNTL Praha, 1983